ГБУ ДО Центр “Интеллект”
Олимпиада по математике, 6 класс
2021 г.
Решения и критерии проверки

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70.

Общие критерии оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. В языке племени “ОРОГОД” есть всего три слога О, РО и ГОД. Словом считается любая последовательность этих слогов (слоги могут повторяться, а также не обязательно использовать все слоги). Сколько различных слов длиной 4 буквы в языке этого племени?

   Решение. Слова из четырех букв разобьем на четыре группы по длине слогов, входящих в слово.

   - $3+1$. В эту группу входят слова из слогов ГОД и О. Два различных слога можно упорядочить двумя способами (ОГОД и ГОДО).
   - $2+2$. В этом случае получаем одно слово РОРО.
   - $2+1+1$. Один слог РО и два слога О можно упорядочить тремя способами (РООО, ОРОО, ООРО).
   - $1+1+1+1$. Из четырех слогов О можно составить одно слово ОООО.

   Всего получаем $2+1+3+1=7$ слов.

   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Слова правильно разбиты на группы по длине слогов, но допущена ошибка при подсчете числа слов в группе, или правильно подсчитаны слова в некоторых группах, но описаны не все группы — 4 балла.

2. Встретились как-то раз рыцарь, лжец, вредина и повторюша. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда врет. Вредина говорит правду, если высказывание перед ним было ложным, и врет, если перед ним сказали правду. А повторюша, наоборот, говорит правду после правды и врет после лжи. Если вредина говорит первым, то он врет, а если повторюша говорит первым, то он говорит правду. Первый сказал: “Я вредина”. Второй ему ответил: “А я не рыцарь”. “Потому что я рыцарь!” — заявил третий. “Ну а я не лжец” — подытожил четвертый. Определите, сколько человек сказали правду.

   Решение. Выясним, кем является первый из говоривших.

- Если первый — рыцарь, то его утверждение ложно, а рыцарь всегда говорит правду. Значит, первый не может быть рыцарем.
- Если первый — вредина, то его утверждение истинно, а если вредина говорит первым, он лжет. Значит, первый не может быть врединой.
- Если первый — повторюша, то его утверждение ложно, а если повторюша говорит первым, он говорит правду. Значит, первый не может быть повторюшей.
- Значит, первый может быть только лжецом. Его высказывание действительно ложно.

Докажем теперь, что второй — вредина.

- Если второй — рыцарь, то его утверждение ложно, а рыцарь всегда говорит правду. Значит, второй не может быть рыцарем.
- Если второй — повторюша, то его утверждение истинно. Но первый солгал, значит, после него повторюша должен тоже солгать. Получаем противоречие.
- Значит, второй — вредина, а его высказывание истинно.

Остается два случая.

- Третий — повторюша. Тогда его высказывание ложно, но после истинного высказывания второго повторюша должен сказать правду. Значит, третий не повторюша.
- Третий — рыцарь, и его высказыание истинно.

Три роли распределены, четвертый может быть только повторюшей. Его высказывание истинно, как и должно быть после истинного предыдущего высказывания.

В итоге получаем, что правду сказали три человека.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Правильно установлена роль некоторых людей, но решение не доведено до конца — по 2 балла за каждого человека.

3. К числу разрешается применять операции: либо умножить его на 2, либо переставить в нём цифры (в любом порядке). Можно ли с помощью нескольких таких операций из 1 получить 147?

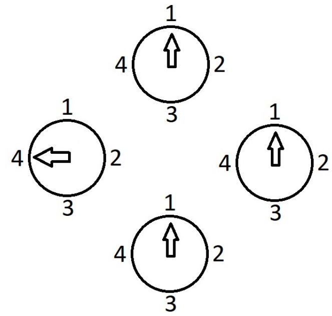
   Решение. Проанализируем задачу с конца.

   Число 147 нечетное, поэтому оно могло быть получено только перестановкой цифр. Переставляя цифры, можно получить два четных числа:

   - 714 получается умножением на 2 числа 357, все цифры которого нечетные.
   - 174 получается умножением на 2 числа 87, которое может быть получено только из числа 78. Число 78 получается из числа 39, все цифры которого нечетные.

   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Использована идея обратного хода, но разобран только один случай из двух — 4 балла.

4. По кругу установлены четыре тумблера на четыре положения (см. рисунок). Три из них установлены в положение “1”, а четвертый — в положение “4”. За один ход можно повернуть либо по часовой стрелке на одно деление два соседних тумблера, либо против часовой стрелки на одно деление два противоположных. Можно ли установить все тумблеры в положение “3”?



Решение. Посмотрим, как меняется число n тумблеров, установленных в нечетное положение.

- Если поворачиваем два тумблера, установленных в нечетное положение, n меняется на $n-2$.
- Если поворачиваем два тумблера, установленных в четное положение, n меняется на $n+2$.
- Если поворачиваем два тумблера, установленных в положения разной четности, n не изменяется.

В любом случае получаем, что четность n не меняется.

Сначала $n = 3$. Если все тумблеры установлены в положение "3", $n = 4$. Значит, установить все тумблеры в положение "3" невозможно.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Явно сформулировано, что важна только четность положения тумблеров — 2 балла. Разобраны несколько вариантов четности из трех — по 2 балла за каждый случай. Баллы за частичные продвижения суммируются.

5. В таблице 6×6 натуральные числа расставлены так, что если посчитать все суммы по строкам, то получится 6 последовательных натуральных чисел. Могло ли получиться так, что все суммы чисел по столбцам равны?

   Решение. Предположим, что так могло получиться. Найдем сумму S всех чисел в таблице.

   С одной стороны, S равно сумме шести последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 3 нечетных, и потому S нечетно.

   С другой стороны, $S = 6k$, где k — сумма чисел в каждом столбце, и потому S четно.

   Полученное противоречие доказывает, что так не могло получиться.

   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Использована идея подсчета суммы чисел в таблице двумя способами, но решение не доведено до конца — 2 балла. Доказано, что сумма чисел во всей таблице делится на 6 (или на 2) — 2 балла. Баллы за частичные продвижения суммируются.

6. В стране 6 городов и 8 дорог, соединяющих эти города (каждая дорога соединяет два города; из одного города в другой есть не более одной дороги). Также известно, что из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что из каждого города можно попасть в любой другой город, перемещаясь по дорогам.

   Решение. Для города X назовем *областью* города X множество тех городов, в которые можно попасть по дорогам из города X, вместе с самим городом X. Заметим, что в каждой области есть хотя бы два города, поскольку из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Кроме того, нет области, в которой ровно пять городов, иначе оставшийся город образует область из одного города.

   Требуется доказать, что данные 6 городов образуют одну область. Пусть это не так. Тогда есть область, в которой от двух до четырех городов. Рассмотрим два города A и B, области которых не пересекаются. Рассмотрим три случая.

- Область города A состоит из 2 городов, соединенных одной дорогой. Тогда за пределами этой области остается 4 города, между которыми 7 дорог. Это невозможно: между 4 городами существует не более 6 дорог (из каждого города выходит не более трех дорог, при этом каждую дорогу мы считаем дважды, значит всего не более $4 \cdot 3/2 = 6$ дорог).
- Область города A состоит из 3 городов. Тогда область города B может состоять тоже только из трех городов. В каждой области из трех городов не больше 3 дорог, а всего не больше 6 дорог, что противоречит условию.
- Область города A состоит из 4 городов. Тогда область города B состоит из двух городов, и этот случай рассматривается аналогично первому случаю.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Рассмотрены не все случаи размеров областей — по 2 балла за каждый случай.

7. Каких чисел среди первых 100000 натуральных больше: с суммой цифр 19 или с суммой цифр 26?

   Решение. Отбросим число 100000, сумма цифр которого равна 1, и добавим число 0, сумма цифр которого равна 0. Тем самым мы не изменим количество чисел с суммой цифр 19 или 26.

   Дополним запись чисел ведущими нулями, чтобы все числа записывались ровно 5 цифрами. Каждому числу $\overline{abcde}$ сопоставим число $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)(9-d)(9-e)}$. Если $a+b+c+d+e=19$, то $(9-a)+(9-b)+(9-c)+(9-d)+(9-e) = 9 \cdot 5 - (a+b+c+d+e) = 45-19 = 26$. Таким образом, все числа с суммой цифр 19 и 26 мы разбили на пары, в каждой из которых у одного числа сумма цифр равна 19, а у другого — 26. Значит, количество чисел с суммой цифр 19 равно количеству чисел с суммой цифр 26.

   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Предложен правильный способ подсчета количества чисел с суммой цифр 19 и 26, но решение не доведено до конца — 2 балла.

8. Сколько есть способов разрезать полоску 2×10 клеток на прямоугольники из двух клеток?

   Решение. Обозначим через a_n число способов разрезать полоску $2 \times n$ клеток на доминошки.

   Легко видеть, что $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Пусть $n \geqslant 3$. Рассмотрим левую нижнюю клетку полоска $2 \times n$. Возможны два случая.

   - Эта клетка покрыта вертикальной доминошкой. Если отрезать эту доминошку, останется полоска размера $2 \times (n-1)$, для которой число замощений доминошками равно a_{n-1}.
   - Эта клетка покрыта горизонтальной доминошкой. Тогда и левая верхняя клетка тоже покрыта горизонтальной доминошкой, а вместе эти две доминошки образуют квадрат, отрезав который, получим полоску $2 \times (n-2)$. Число таких замощений равно a_{n-2}.

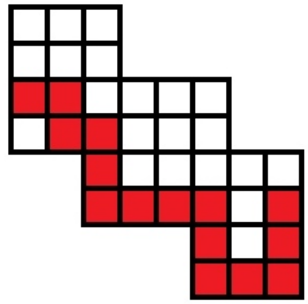
   Получаем соотношение $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

   Теперь можно последовательно найти значения $a_3, \ldots, a_{10}$.

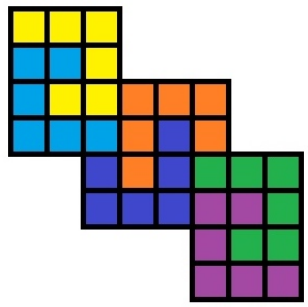
   $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$.

   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Найдено число способов разрезать полоску $2 \times n$ при некоторых $n < 10$ — 1 балл. Получено рекуррентное соотношение — 5 баллов. Баллы за частичные продвижения суммируются.

9. Разрежьте фигуру (см. рисунок) на шесть фигур одинаковой формы и одинаковой площади так, чтобы каждая содержала разное число закрашенных клеток.



Решение.



Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Пример не построен, но доказано, что фигуры должны содержать 0, 1, 2, 3, 4, 5 закрашенных клеток — 3 балла.

10. В однокруговом футбольном турнире приняли участие 7 команд. За каждый выигрыш команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. По итогам турнира команды “Альфа” и “Бета”, занявшие первые два места, набрали по k очков. Причем оказалось, что нет такой команды, которая бы проиграла и “Альфе”, и “Бете”. Какое наибольшее значение может принимать k?

Решение. Докажем, что $k \leqslant 11$. Команды “Альфа” и “Бета” в играх с каждой из пяти других команд в сумме набрали не больше 4 очков (выигрыш + ничья). Между собой команды “Альфа” и “Бета” разыграли не больше 3 очков. Значит, $2k \leqslant 4 \cdot 5 + 3 = 23$.

Пример турнирной таблицы, в которой $k = 11$:

	Альфа	Бета	Гамма	Дельта	Эпсилон	Дзета	Эта	Сумма
Альфа	×	3	3	3	1	1	0	11
Бета	0	×	1	1	3	3	3	11
Гамма	0	1	×	1	1	1	1	5
Дельта	0	1	1	×	1	1	1	5
Эпсилон	1	0	1	1	×	1	1	5
Дзета	1	0	1	1	1	×	1	5
Эта	3	0	1	1	1	1	×	7

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Только доказана оценка $k \leqslant 11$ — 4 балла. Только построен пример с $k = 11$ — 3 балла.